

> restart;
 > dp:=(p,q)->int(p*q,x=-1..1);

$$(p, q) \rightarrow \int_{-1}^1 p q dx \quad (1)$$

> nm:=p->sqrt(dp(p,p));

$$p \rightarrow \sqrt{dp(p, p)} \quad (2)$$

> tv0:=1;

$$1 \quad (3)$$

> v0:=tv0/nm(tv0);

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (4)$$

> tv1:=x-dp(x,v0)*v0;

$$x \quad (5)$$

> v1:=tv1/nm(tv1);

$$\frac{1}{2} x \sqrt{6} \quad (6)$$

> tv2:=x^2-dp(x^2,v0)*v0-dp(x^2,v1)*v1;

$$x^2 - \frac{1}{3} \quad (7)$$

> v2:=tv2/nm(tv2);

$$\frac{3}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{10} \quad (8)$$

> tv3:=x^3-dp(x^3,v0)*v0-dp(x^3,v1)*v1-dp(x^3,v2)*v2;

$$x^3 - \frac{3}{5} x \quad (9)$$

> v3:=tv3/nm(tv3);

$$\frac{5}{4} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right) \sqrt{14} \quad (10)$$

> int(v1*v1,x=-1..1);

$$1 \quad (11)$$

> solve(v3=0,x);

$$0, \frac{1}{5} \sqrt{15}, -\frac{1}{5} \sqrt{15} \quad (12)$$

> tv4:=x^4-dp(x^4,v0)*v0-dp(x^4,v1)*v1-dp(x^4,v2)*v2-dp(x^4,v3)*v3;

$$x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7} x^2 \quad (13)$$

> v4:=tv4/nm(tv4);

$$\frac{105}{16} \left(x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7} x^2 \right) \sqrt{2} \quad (14)$$

> plot(v4,x=-1..1);

